数理解析研究所講究録
542巻 1985年 128-143

Hyperbolic 3-cone-manifolds について

早大教育　相馬輝彦 (Teruhiko Soma)

1981年に、Thurston [3] は1次元以上の singular locus を持つ compact, irreducible 3-orbifold は geometric decomposition をを持つと発表した。この定理は hyperbolic 3-cone-manifolds の構造の deformation 理論及び deformation のある種の極限 (geometric limit) の解析を使って証明されている。Thurston の定義した hyperbolic 3-cone-manifold においては、その singular locus の各 vertex における valency はすべて3である。我々の目標は hyperbolic 3-cone-manifold の定義を singular locus がより一般の combinatorial type を持つものへと拡張し、かつそのような定義のもとでもある程度の構造の deformation が可能なことを示すことにある。最後になぜこのような deformation の一般化を考えたのか、その理由を簡単に述べる。

§1. $\mathbb{H}^3$ の isometry の基本的な性質

$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ を向きを保つ $\mathbb{H}^3$ の自己等長写像の集合とする。$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ は、その元を Möbius transformation と考えることによって、$PSL_2(\mathbb{C})$ と同一視される。$\phi: SL_2(\mathbb{C}) \to PSL_2(\mathbb{C})$ を等化写像（ここでは 2-fold covering）とする。$\alpha \in PSL_2(\mathbb{C})$ の元を $\phi^{-1}(\alpha)$ の元の1つ $\tilde{\alpha}$ と同一視する。$tr(\tilde{\alpha})$ を α の <u>trace</u> といい $tr(\alpha)$ と書く。非自明な $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の元 g に対し、(i) $tr(g) = \pm 2$ のとき g を <u>parabolic</u>, (ii) $tr(g) \in \mathbb{R}$, $|tr(g)| < 2$ のとき <u>elliptic</u>, (iii) $tr(g) \in \mathbb{R}$, $|tr(g)| > 2$ のとき <u>hyperbolic</u>, (iv) $tr(g) \notin \mathbb{R}$ のとき <u>loxodromic</u> という。g が上の4種類の型のどれに入るかによって g の $\mathbb{H}^3 \cup S^2_\infty$ 上への作用が特徴づけられるが、ここではそれには言及しない。詳しいことは Thurston [2] 参照。

<u>定義</u>. ℓ_1, ℓ_2 を $\mathbb{H}^3$ の geodesics とする。$\mathbb{H}^3$ の中の (totally geodesic) plane P で $P \supset \ell_1 \cup \ell_2$ となるものが存在するとき、ℓ_1 と ℓ_2 は <u>planar position</u> にあるといい、それ以外のときは <u>general position</u> にあるという。

<u>補題</u>1. ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 を $\mathbb{H}^3$ の中の geodesics で、$\ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3$ を含む plane は存在しないと仮定する。もし $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$

のそれぞれの2対がplanar positionにあれば、次のいずれかが成立する。

(i) $l_1 \cap l_2 \cap l_3$ は $\mathbb{H}^3 \cup S^2_\infty$ の中の1点。

(ii) plane P で、各 l_i と1点で垂直に交わるものが唯一つ存在する（図1参照）。

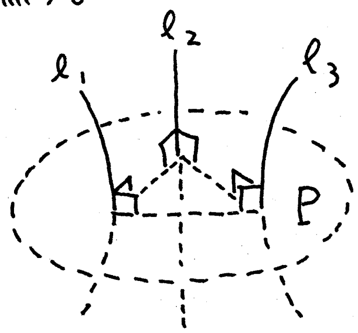

図 1

次の補題の一部分はThurstonによる。

補題2. α, β を elliptic elements とし、それぞれの回転軸を l_α, l_β とする。このとき l_α, l_β がplanar positionにあるための必要十分条件は $\mathrm{tr}(\alpha\beta) \in \mathbb{R}$ である。

証明. l_α, l_β がplanar positionにあるとする。$l_\alpha = l_\beta$ のときは、明らかに $\alpha\beta$ は elliptic。$l_\alpha \cap l_\beta$ が $\mathbb{H}^3$ の中の1点のときは、$\mathrm{fix}(\alpha\beta) \supset l_\alpha \cap l_\beta$ より、$\alpha\beta$ は elliptic。$l_\alpha \cap l_\beta$ が S^2_∞ の中の1点 ∞ のときは $\mathrm{fix}(\alpha\beta) \ni \{\infty\}$。E を点 ∞ における holosphere とするとき、$\alpha(E) = \beta(E) = E$。よって $\alpha\beta(E) = E$。したがって $\alpha\beta$ は elliptic または parabolic。$l_\alpha \cap l_\beta$

$=\phi$ のとき、P を $\ell_\alpha \cup \ell_\beta$ を含む plane とする。s を ℓ_α と ℓ_β を結ぶ最短の線分とする。このとき $s \subset P$。s を含み P と直交する plane を Q とすると、$\alpha(Q)=\beta(Q)=Q$ である。したがって $\alpha\beta$ は $PSL_2(\mathbb{R})$ の元と conjugate、特に $tr(\alpha\beta)\in\mathbb{R}$。

次に ℓ_α, ℓ_β が general position にあると仮定する。α, β の rotation angle を $r(\alpha), r(\beta)$ とする。$r(\alpha), r(\beta)<\pi$ と仮定できる。もし $r(\alpha)\geqq\pi$ のときは $\gamma^2=\alpha$ なる elliptic element γ を考えれば、$Tr(\alpha\beta)+Tr(\beta)=Tr(\gamma)Tr(\gamma\beta)$, $Tr(\gamma)\neq 0$ より、$Tr(\alpha\beta)\in\mathbb{R}$ が $Tr(\gamma\beta)\in\mathbb{R}$ と同値になるからである。ℓ_α と ℓ_β を結ぶ最短線分を s とする。s を通り ℓ_α, ℓ_β と直交する plane をそれぞれ P_α, P_β とする。$\{x_\alpha\}=\ell_\alpha\cap P_\alpha$, $\{x_\beta\}=\ell_\beta\cap P_\beta$ とおく。P_α の x_α を通る geodesics λ_1, λ_2, P_β の x_β を通る geodesics μ_1, μ_2 を次の図で示されているように定義する。

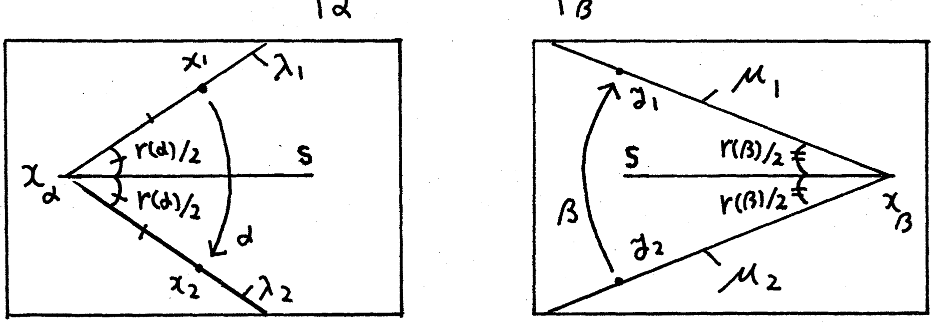

図 2

また $\rho\in Isom^+(\mathbb{H}^3)$ を s のまわりの 180° 回転とする。

l_α, l_β は general position にあるので、λ_1 と μ_1 も general position にある。λ_1, μ_1 を結ぶ最短線分を t_1, λ_2, μ_2 を結ぶ最短線分を t_2 とする。$t_i \cap \lambda_i = \{x_i\}$, $t_i \cap \mu_i = \{y_i\}$ とおく（図3参照）。

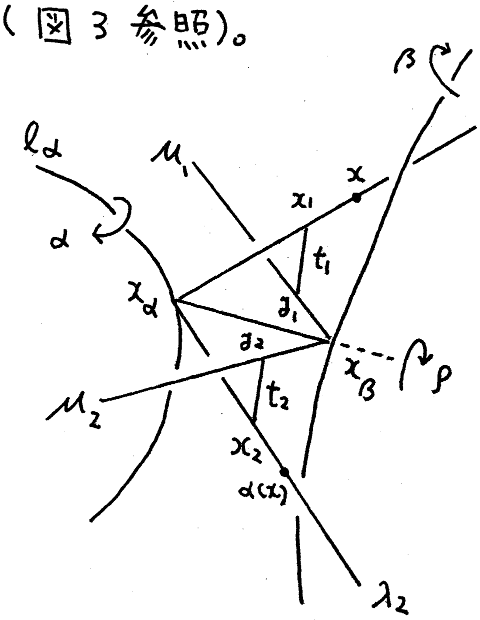

図3

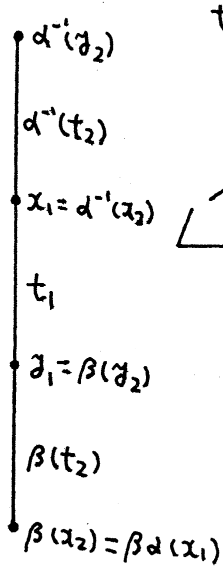

図4

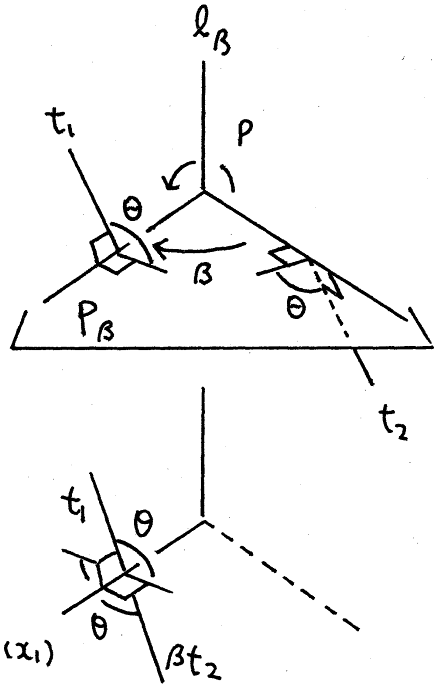

図5

$\rho(\lambda_1)=\lambda_2$, $\rho(\mu_1)=\mu_2$ より, $\rho(t_1)=t_2$。したがって $x_2 = \alpha(x_1)$, $\beta(y_2)=y_1$。図4, 図5 からわかるように $\alpha^{-1}(y_2)$, x_1, $\beta(y_2)$, $\beta\alpha(x_1)$ を通る geodesic l が存在する。$\beta\alpha(l)=l$ であり, $\beta\alpha(x_1)\neq x_1$ より、$\beta\alpha$ は hyperbolic または loxodromic である。λ_1 上の x_1 以外の点を x とすると、x と $\beta\alpha(x)$ は $\mu_1 \cup t_1$ を含む plane $Q\,(\supset l)$ によって分離される。したがって $\beta\alpha(Q)\neq Q$ または $\beta\alpha(Q)=Q$ かつ $\beta\alpha|_Q : Q\to Q$ は向きを

逆にするisometry。よって$\beta\alpha$はloxodromic。特に$tr(\alpha\beta)$ $=tr(\beta\alpha)\notin\mathbb{R}$。(証明終)

§2. Hyperbolic 3-cone-manifoldの定義

hyperbolic 3-cone-manifold のlocal modelとは3-ballまたは3-ballから内点を1点除いた空間上に定義されたmetricで次の(i)-(iv)のいずれかの型に属するものをいう。

(i) P_1, P_2を$\mathbb{H}^3$のplaneで$P_1\cap P_2$が$\mathbb{H}^3$のgeodesicになるものとする。$\mathbb{H}^3-P_1\cup P_2$の1つのcomponentをXとし、$\overline{X}$をそのclosureとする。2つのhalf planes $P_1\cap\overline{X}$, $P_2\cap\overline{X}$のつくる$\overline{X}$側のangleを$\alpha(\overline{X})$ $(0<\alpha(\overline{X})<\pi)$とおく。$x\in P_1\cap P_2$に対して、$B_\varepsilon(x)=\{y\in\mathbb{H}^3\mid d(x,y)\leqq\varepsilon\}$とおく。$A(\varepsilon)=B_\varepsilon(x)\cap\overline{X}$とおくとき、$A(\varepsilon)\cap P_1$, $A(\varepsilon)\cap P_2$を$A(\varepsilon)$のface, $\alpha(A(\varepsilon))=\alpha(\overline{X})$を$A(\varepsilon)$のangleという。同様にして構成された$A_1(\varepsilon),\dots,A_n(\varepsilon)$を考える。$A_i(\varepsilon)$のfaceを$F_{i1}$, F_{i2}とする。明らかにすべてのF_{ij}, $1\leqq i\leqq n$, $1\leqq j\leqq 2$はisometricである。$A_1(\varepsilon),\dots,A_n(\varepsilon)$のdisjoint unionから$F_{i2}$と$F_{i+1,1}$(ただし$n+1=1$とする)を向きを逆にするisometryで同一視してできたmetric 3-ballを$B_I^{(\varepsilon)}$とする。$\phi: A_1(\varepsilon)\cup\cdots\cup A_n(\varepsilon)\to B_I^{(\varepsilon)}$をその等化写像とするとき、$\Sigma_I^{(\varepsilon)}=\phi(A_1(\varepsilon))\cap\cdots\cap\phi(A_n(\varepsilon))$をsingular locusといい、$\alpha=\alpha(A_1(\varepsilon))+\cdots+$

$\alpha(An(\varepsilon))$ を $\Sigma_{\mathrm{I}}^{(\varepsilon)}$ のまわりの cone-angle という。$(B_{\mathrm{I}}^{(\varepsilon)}, \Sigma_{\mathrm{I}}^{(\varepsilon)})$ を type I の ε-local model という。

(ii) (i) と同じ記号を使う。Q を P_1, P_2 に直交し、かつ x を含む plane とする。$\mathbb{H}^3 - P_1 \cup P_2 \cup Q$ の1つの component $Y \subset X$ の closure $\overline{Y}$ に対して, $B(\varepsilon) = \overline{Y} \cap B_\varepsilon(x)$ とおく。$B(\varepsilon)$ の face を $B(\varepsilon) \cap P_1$, $B(\varepsilon) \cap P_2$ で定義する。以下 (i) と同様にして定義した metric 3-ball $(B_{\mathrm{II}}^{(\varepsilon)}, \Sigma_{\mathrm{II}}^{(\varepsilon)})$ を type II の ε-local model という。Σ_{II} のまわりの cone-angle も同様にして定義できる。

(iii) P_1, P_2, P_3 を $\mathbb{H}^3$ の planes で, $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ が $\mathbb{H}^3$ 内の1点 x であるものとする。$\mathbb{H}^3 - P_1 \cup P_2 \cup P_3$ のある component Z の closure を $\overline{Z}$ とし、$C^{(\varepsilon)} = \overline{Z} \cap B_\varepsilon(x)$ とおく。$C^{(\varepsilon)} \cap P_i$ $(i=1,2,3)$ を $C(\varepsilon)$ の face という。同様にして定義された $C_1(\varepsilon), \ldots, C_n(\varepsilon)$ が次の条件を満足すると仮定する。

[条件] T を S^2 の三角分割とし、$T^{(2)}$ を T の 2-simplex 全体の集合とする。$T^{(2)}$ の各元 Δ_i に対し、PL-同相 h_i: $(\Delta_i * p, p) \to (C_i^{(\varepsilon)}, x_i)$ が存在し、次のようになっているとする。$\Delta_i \cap \Delta_j$ $(\neq \emptyset, i \neq j)$ に対して, $h_i((\Delta_i \cap \Delta_j) * p) = F_{ij}$ は $C_i(\varepsilon)$ の face, $h_j \circ h_i^{-1}: F_{ij} \to F_{ji}$ は isometry。$C_1^{(\varepsilon)}, \ldots, C_n^{(\varepsilon)}$ の disjoint union より $h_j \circ h_i^{-1}$ に沿って faces を同一視してできる metric 3-ball $(B_{\mathrm{III}}^{(\varepsilon)}, \Sigma_{\mathrm{III}}^{(\varepsilon)})$ を type III

の ε-local modelという。ただし $\phi: C_1(\varepsilon)\cup\cdots\cup C_n(\varepsilon)\to B_{\mathrm{III}}^{(\varepsilon)}$ を等化写像とするとき，$\Sigma_{\mathrm{III}}^{(\varepsilon)}=\phi(C_1(\varepsilon))\cap\cdots\cap\phi(C_n(\varepsilon))$。

(iv) P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{H}^3$ の planes で各2対 P_i, P_j に対して $P_i\cap P_j$ は geodesic であり，$P_1\cap P_2\cap P_3$ は S^2_∞ 内の1点 y であるとする。$\mathbb{H}^3$ を y を無限遠点とした上半平面modelで考えると、$\ell_i = P_i\cap\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ 内の直線である。ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 で囲まれた $\mathbb{C}$ 内の三角形と隣接する $\mathbb{H}^3 - P_1\cup P_2\cup P_3$ の component を W とおく。$B(y)$ を y における holoball とし，$D=\overline{W}\cap B(y)$ とおく。ただし $\overline{W}$ は W の $\mathbb{H}^3$ における closure。$D\cap P_i$ $(i=1,2,3)$ を D の face といい，(iii) と同様に S^2 の三角分割 T を考える。$\Delta_i\in T^{(2)}$ に対してPL-同相 $h_i:(\Delta_i * p - \{p\})\to D_i$ が定義されていて，$h_j\circ h_i^{-1}: F_{ij}\to F_{ji}$ は isometry になっているとする。ただし $F_{ij}=h_i((\Delta_i\cap\Delta_j)*p)$ は D_i の face。$D_1,\ldots, D_n$ の disjoint union より $h_j\circ h_i^{-1}$ に沿って faceを同一視して metric 3-ball $(B_{\mathrm{IV}}, \Sigma_{\mathrm{IV}})$ が定義できたとき，これを type IV の local model という。ただし $\phi: D_1\cup\cdots\cup D_n\to B_{\mathrm{IV}}$ を等化写像とするとき，$\Sigma_{\mathrm{IV}}=\phi(D_1)\cap\cdots\cap\phi(D_n)$。

注意. $h_j\circ h_i^{-1}$ に沿っての同一視によって $B_{\mathrm{IV}}-\Sigma_{\mathrm{IV}}$ 上に hyperbolic structure を定義することは常に可能である。これが $(B_{\mathrm{IV}}, \Sigma_{\mathrm{IV}})$ 上の local model に拡張されるためには，Σ_{IV} の各 edge の meridian における holonomy が ellipticであれ

ばよい。

N を compact, connected, orientable 3-manifold とし、∂N は空であるかまたは 2-spheres からなるとする。$p_1, \dots, p_k$ を int N 内の相異なる点とし、$N - \{p_1, \dots, p_k\}$ 上に次のような metric が定義されているとする。$N \ni x$ が $\{p_1, \dots, p_k\}$ の元でないとき、十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して、$B_\varepsilon(x)$ は type I, II, III の ε-local model のいずれかと isometric。ただし $B_\varepsilon(x)$ が type II の ε-local model と isometric になるのは $x \in \partial N$ のとき、またそのときに限る。$x \in \{p_1, \dots, p_k\}$ に対しては、x の N における近傍 U が存在し、$\bar{U} - \{x\}$ は type IV の local model と isometric。Σ_0 をこれらの isometries によって local model から引き戻された singular locus の逆像の和集合から cone-angle 2π の edges を取り除いたものとする。∂N の各 component S_i に対して、(B_i, Σ_i) を $(S_i * p_i, (S_i \cap \Sigma_0) * p_i)$ で定義する（図6参照）。

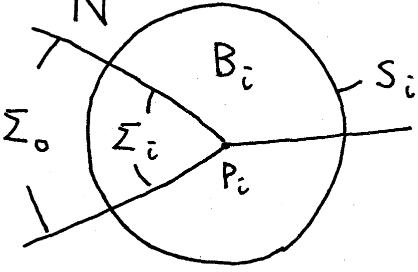

図 6

$N, B_1, \dots, B_n$ の各 boundary を同一視することによって

closed 3-manifold M が得られる。$M \supset \Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_n \cup \{p_1\} \cup \cdots \cup \{p_n\}$ とおくと Σ は M の中の simplicial 1-sub-complex になる。このようにして定義された M または (M, Σ) を structure N を持つ hyperbolic 3-cone-manifold という。また Σ をこの cone-manifold の singular locus という。

§3. Hyperbolic 3-cone manifold structure の deformation

Thurston は補題2の結果を利用して，singular locus の各 vertex における valency が3の場合の deformation を考えている。ここで，それを簡単に復習してみる。v を Σ の vertex とし，e_1, e_2, e_3 を v を end の1つとしてもつ edges とする。$M - \Sigma$ は hyperbolic manifold の構造を持つから，holonomy $\rho_0 : \Pi \to PSL_2(\mathbb{C})$ が定義される。ただし $\Pi = \pi_1(M - \Sigma)$。μ_1, μ_2, μ_3 を edges e_1, e_2, e_3 のまわりの meridian であるとする（図7参照）。

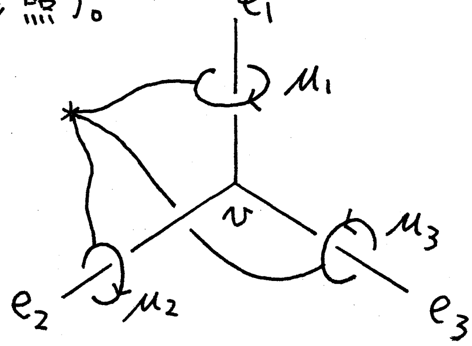

図 7

このとき $\rho_0([\mu_i])$ $([\mu_i] \in \Pi)$ は elliptic になる。ここ

で次の問題を考える。

<u>問題</u> ρ_0に十分近い representation $\rho : \Pi \to PSL_2(\mathbb{C})$ において、Σの各edgeのまわりのmeridian μに対し$\rho([\mu])$がellipticになっているとき、ρはhyperbolic 3-cone-manifoldのholonomyとして実現できるか？

まず$N(\Sigma_0)$をΣ_0のNにおけるregular neighborhoodとする。Thurston [2]により，ρ_0の十分近くのrepresentation ρは$N - \partial N \cup N(\Sigma_0)$上のhyperbolic structureのholonomyとして実現できる。また任意の$\rho([\mu])$はellipticであるからhyperbolic Dehn surgeryの可能性に関する議論と同様にして、上のhyperbolic structure $\mathcal{S}$はΣのvertex vの近傍を除いたedges $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$まで拡張できる。図8参照。

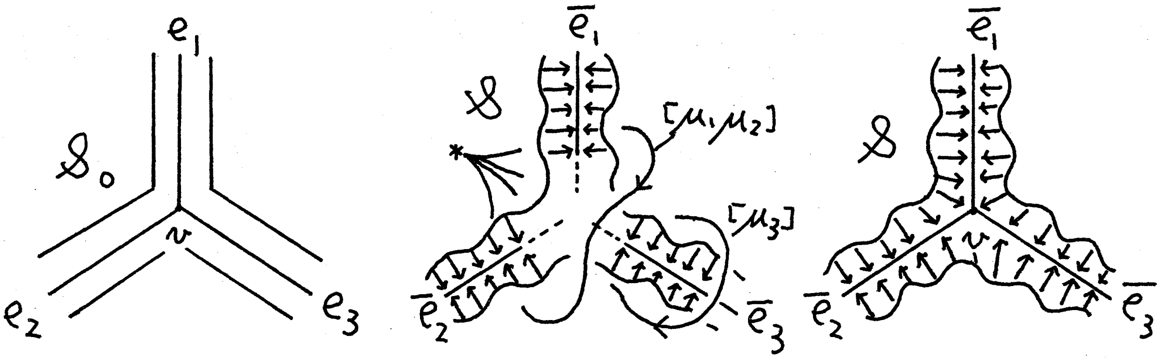

図 8

ここで$[\mu_1\mu_2] = [\mu_3]$であるから、$\rho([\mu_1])\rho([\mu_2])$

$= \rho([\mu_3])$。特に、$tr(\rho([\mu_1])\rho([\mu_2])) \in \mathbb{R}$。したがって補題2より $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ のそれぞれの2対は planar position にある。よって補題1より、δ は M 上の hyperbolic cone-manifold structure まで拡張される。

上の議論は Σ の vertex の valency が3より大きくなるときには適用できないのは明らかである。(M, Σ) を hyperbolic 3-cone-manifold とし、$\rho_0 : \Pi \to PSL_2(\mathbb{C})$ をその holonomy とする。ただし、$\Pi = \pi_1(M - \Sigma)$。Σ の各vertex v に対して、v を中心とした M の中に embed された3-ball を $B(v)$ とする。v を end としてもつ edges を $e_1, \ldots, e_n$ とする。$\partial B(v)$ 上の $n(n-1)/2$ 個の simple loops $\{c_{ij} \mid 1 \leqq i < j \leqq n\}$ の集合とは次のようなものとする。c_{ij} は $\partial B(v)$ 上の disk D_{ij} で $D_{ij} \cap \Sigma = \partial B(v) \cap (e_i \cup e_j)$ となるものを bounds する（図9参照）。

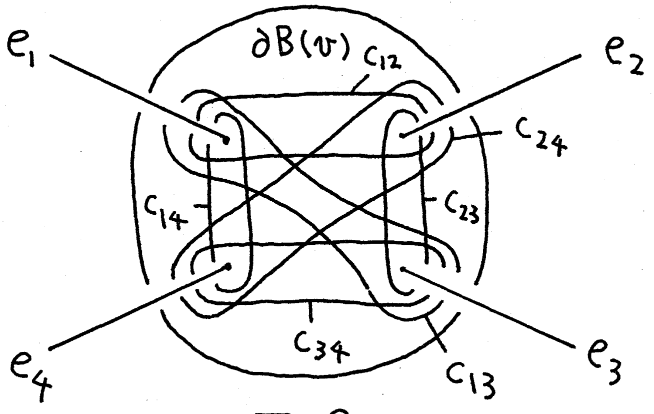

図 9

補題1,2より, $\mathrm{tr}\,\rho_0([c_{ij}]) \in \mathbb{R}$ 。

<u>定義</u>. representation $\rho : \pi \to PSL_2(\mathbb{C})$ が<u>geometrically realizable</u>（簡単にg-realizable）であるとは、ρ が (M, Σ) 上のある hyperbolic 3-cone-manifold structure の holonomy として実現できることをいう。また ρ が<u>algebraically realizable</u>（簡単にa-realizable）であるとは、Σ の各 edge のまわりの meridian μ に対して $\rho([\mu])$ は elliptic であり、かつ各 vertex v_k のまわりで上のようにして定義された $c_{ij}^{(k)}$ に対して $\mathrm{tr}\,\rho([c_{ij}^{(k)}]) \in \mathbb{R}$ となることをいう。

(i) ρ が a-realizable であるという定義は各 vertex v_k における $\{c_{ij}^{(k)}\}$ の選択の仕方によらない。

(ii) ρ が g-realizable であれば、a-realizable であるが、逆は一般に成立しない。

<u>命題</u>. ρ_0 を g-realizable representation とし、ρ を ρ_0 に十分近い representation とする。このとき、もし ρ が a-realizable であれば、g-realizable である。

この命題は一見もっともらしいが、実のところは何も言っ

ていないのに等しい。というのは、命題が成立するように a-realizable の定義がされているからである。したがって、ここでしなければいけないことは実際に g-realizable な representation の近くに a-realizable な representation が存在することを示さなくてはいけない。

(M, Σ) を closed 3-manifold と collapse しない simplicial 1-subcomplex の対とする。Σ の各 vertex v_i $(1 \leqq i \leqq n)$ を中心とした 3-ball を B_i とする。$(M - \mathrm{int}(B_1 \cup \cdots \cup B_n), \Sigma - \Sigma \cap (\mathrm{int}(B_1 \cup \cdots \cup B_n)))$ の 2 つの copy $(N_1, \Sigma_1), (N_2, \Sigma_2)$ の対応する境界を同一視して得られた対を $(D(M), D(\Sigma))$ とおく。$D(\Sigma)$ は closed 3-manifold $D(M)$ の中の link になる。$i : (N_1, \Sigma_1) \subset (D(M), D(N))$ を inclusion とする。また $N_1 - \Sigma_1 \subset M - \Sigma$ は homotopy 同値である。$\Pi = \pi_1(N_1 - \Sigma_1) = \pi_1(M - \Sigma)$, $\Pi^D = \pi_1(D(M) - D(\Sigma))$ とおく。$\Pi \to SL_2(\mathbb{C})$, $\Pi^D \to SL_2(\mathbb{C})$ の representation 全体のつくる空間を $X(\Pi)$, $X(\Pi^D)$ とおく。詳しい定義は Culler-Shalen [1] を参照。[1] より, $X(\Pi)$, $X(\Pi^D)$ は affine algebraic varieties になる。$i_* : \Pi \to \Pi^D$ より, regular map $i^* : X(\Pi^D) \to X(\Pi)$ が定義される。ここで $D(M) - D(\Sigma)$ が finite volume の complete hyperbolic structure ∞ をもつとする。$i^*(\infty)$ を含む $X(\Pi)$ の irreducible component を X_0 とする。このとき次の定理が得

られる。

<u>定理</u>. X_0をreal algebraic varietyとみなしたとき，X_0の中の(real) algebraic curve γで次の(i)-(iii)を満足するものが存在する。

(i) $\gamma \ni i^*\infty$

(ii) γを$\mathbb{R}$と同一視したとき，γの中に半開区間$[i^*\infty, \rho_0)$が存在し，$[i^*\infty, \rho_0)$内の任意の元ρはa-realizableである。

(iii) 命題より，$[i^*\infty, \rho_1)$ $(\rho_1 \leqq \rho_0)$内の任意の元ρはg-realizableであるが，ρ_1がg-realizableでないとき，ρ_1をgeometric limitという。もし$[i^*\infty, \rho_0)$がgeometric limitを持たないならば，$[i^*\infty, \rho_0)$の元ρで各edgeのまわりのmeridian μに対して$\rho([\mu])$が『rotation angle 2πのelliptic element』になるものが存在する。すなわちMはhyperbolic 3-manifoldになる。

§4. これからの目標

上の定理のreal algebraic curve γが定理の(iii)の仮定を満足していることが最も望ましいことであるが一般にそれは不可能である。hyperbolic 3-cone manifoldsの列が

geometric limit に到達したとき、cone-manifold structure をそれ以上 deform させることができない。したがって今すべきことは、hyperbolic 3-cone-manifold の概念を一般化し、その中で deformation を考えることによって、geometric limit を自然に通過できるようにすることである。これは上の定理を利用することによってある程度可能である。次にすべきことは、一般化された概念の中の deformation によって得られた結果をいかにして underling manifold M の性質と結びつけるかにある。

講演者はこのような方向での 3-manifolds の研究から、Geometrisation Conjecture に寄与できるような結果が得られるのではないかと考えている。

参考文献

[1] M. Culler, P. Shalen : Varieties of group representations and splitting of 3-manifolds, Ann. of Math. 117 (1983), 109-149.

[2] W. Thurston : The geometry and topology of 3-manifolds (to appear).

[3] ____ : Three-manifolds with symmetry, preprint.